TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN Tập I (1985) SỐ 3 (22-24)

VỀ CHỌN THAM SỐ HIỆU CHỈNH CHO PHƯƠNG TRÌNH HAMMERSTEIN

NGUYỄN BƯỜNG

1. Khả năng chọn tham số hiệu chỉnh từ nguyên lý độ lệch đối với bài toán thiết lập không đúng đắn trong trường hợp tuyến tính được nghiên cứu khá nhiều [1, 2]. Đối với trường hợp phi tuyến với toán tử đơn điệu, nguyên lý đó được chứng minh là thuật toán hiệu chỉnh, [3] – [6]. Nhưng trong trường hợp chung (phi tuyến, ngay cả có tính liên tục) nguyên lý đó không áp dụng được [7]. Vì vậy đối với từng lớp bài toán, cần nghiên cứu cách chọn tham số hiệu chỉnh cho thích hợp. Trong bài này, ở phần 2, chúng tôi xét phương pháp toán tử hiệu chỉnh cho lớp bài toán ở đề bài; phần 3, chúng tôi đưa vào xét một hàm có tính chất như độ lệch cho phương trình với toán tử đơn điệu, dựa vào đó ta có khả năng chọn tham số hiệu chỉnh.

2. Cho X là không gian Banăc có tính chất E (phản xạ và từ $x_n \to x$, $\|x_n\| \to \|x\| \Rightarrow x_n \to x$, $n \to +\infty$), X^* đối ngẫu tôpô của X, sao cho X và X^* là lồi chặt.

Xét phương trình toán tử loại Hammerstein sau:

$$x + F_2 F_1(x) = f_0 \tag{1}$$

với: $F_1: X \to X^*$, $F_2: X^* \to X$ là các toán tử đơn điệu, nói chung là phi tuyến và hemi – liên tục [8]. Với các điều kiện đó bài toán tìm nghiệm của phương trình (1) là bài toán thiết lập không đúng đắn theo nghĩa cổ điển, vì vậy cần nghiên cứu thuật toán xấp xỉ nghiệm cho phương trình:

$$x + F_2 F_1(x) = f_\delta \quad \|f_\delta - f_0\| \leqslant \delta \tag{2}$$

Gọi $U: X \to X^*$ và $V: X^* \to X$ là các ánh xạ đối ngẫu [8]. Xét phương trình:

$$x + F_{2,\alpha} F_{1,\alpha}(x) = f_\delta \tag{3}$$

với:

$$F_{1,\alpha}(x) = F_1(x) + \alpha U(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

$$F_{2,\alpha}(x^*) = F_2(x^*) + \alpha V(x^* - x_0^*) \quad \forall x^* \in X^*$$

$x_0 \in X$ và $x_0^* \in X^*$ là các điểm cố định nào đó.

ĐỊNH LÝ 1: Với các điều kiện trên, phương trình (3) có duy nhất nghiệm $x_{\alpha,\delta}$ với mỗi $\alpha > 0$ và f_δ. Nếu $\alpha, \frac{\delta}{\alpha} \to 0$ để cho dãy $x_{\alpha,\delta}$ hội tụ tới một phần tử nào đó của X điều kiện cần và đủ là phương trình (1) có nghiệm.

Chứng minh: Xét không gian Banăc $Z = X \times X^*$ với $Z = [x, x^*]$, $x \in X$, $x^* \in X^*$ và $\|Z\| = (\|x\|^2 + \|x^*\|^2)^{1/2}$.

Dễ dàng thấy được phương trình (3) có nghiệm $x_{\alpha,\delta}$ khi và chỉ khi có $z_{\alpha,\delta} = [x_{\alpha,\delta}, F_{1,\alpha}(x_{\alpha,\delta})]$ là nghiệm của phương trình:

$$A_\alpha(z) = \bar{f}_\delta, \quad \bar{f}_\delta = [0, f_\delta] \tag{4}$$

với:

$$A_\alpha(z) = A_\alpha([x, x^*]) = [F_{1,\alpha}(x) - x^*, x + F_{2,\alpha}(x^*)] = A(z) + \alpha J(z - z_0)$$
$$A(z) = [F_1(x) - x^*, x + F_2(x^*)]$$
$$J(z) = [U(x), V(x^*)], \; z_0 = [x_0, x_0^*].$$

Do A là toán tử đơn điệu, hemi – liên tục từ không gian Banăc phản xạ Z vào Z và $J : Z \to Z^*$ là ánh xạ đối ngẫu cho nên phương trình (4) có duy nhất nghiệm $z_{\alpha,\delta}$. Suy ra phương trình (3) có duy nhất nghiệm $x_{\alpha,\delta}$ với mỗi $\alpha > 0$ và f_δ. Nếu $\alpha \to 0$, $\delta = 0\,(\alpha)$ và phương trình (1) có nghiệm thì $x_{\alpha,\delta}$ hội tụ với nghiệm nào đó của phương trình (1) được chứng minh trong [9], khi $x_0 = o_x$, $x_0^* = o_x^*$. Trường hợp x_0 xà x_0^* bất kỳ chứng minh tương tự. Ta chứng minh: nếu $x_{\alpha,\delta} \to \bar{x} \in X$ thì $\bar{x}$ là nghiệm của phương trình (1). Do $z_{\alpha,\delta}$ là nghiệm của phương trình (4) cho nên $A(z_{\alpha,\delta}) + \alpha J(z_{\alpha,\delta} - z_0) = \bar{f}_\delta$. Vì X và X^* là lồi chặt và X là phản xạ, từ [8] có U và V là các ánh xạ đơn điệu, hemi – liên tục. Suy ra J có các tính chất như U và V. Từ đó ta có: A_α là toán tử hemi–liên tục và đơn điệu. Khi đó $z_{\alpha,\delta}$ thỏa mãn điều kiện)

$$\langle A(z) + \alpha J(z - z_0) - \bar{f}_\delta, z - z_{\alpha,\delta} \rangle \geq 0 \; \forall z \in Z \tag{5}$$

Vì F_1 giới nội địa phương tại $\bar{x}$. cho nên tồn tại lân cận $O(\bar{x})$ sao cho $\bigcup_{x \in O(\bar{x})} F_1(x)$–giới nội.

Từ $x_{\alpha,\delta} \to \bar{x}$. $\alpha \to 0$ suy ra: tồn tại $\alpha_0 >$ sao cho $x_{\alpha,\delta(\alpha)} \in O(\bar{x})$ $\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha_0$. Như vậy $\{F_1(x_{\alpha,\delta})\}_{0 < \alpha \leq \alpha_0}$ giới nội trong không gian phản xạ X^*, cho nên có thể trích được dãy con, ta ký hiệu luôn là $F_1(x_{\alpha,\delta})$, hội tụ yếu đến thành phần $\bar{y}^* \in X^*$, suy ra $x_{\alpha,\delta}$ hội tụ yếu đến $\bar{z} = [\bar{x}, \bar{y}^*]$.

Cho $\alpha \to 0$ trong (5) ta được

$$\langle A(z) - \bar{f}_0, z - \bar{z} \rangle \geq 0, \; \forall z \in Z.$$

Bất đẳng thức cuối cùng tương đương với $A(\bar{z}) = \bar{f}_0$ tức là $\bar{x}$ nghiệm của phương trình (1). Định lý được chứng minh.

3. Giả độ lệch: Đại lượng $\rho(\alpha) = \alpha\,(\|x_{\alpha,\delta} - x_0\|^2 + \|F_1(x_{\alpha,\delta})$

$$+ \alpha U(x_{\alpha,\delta} - x_0) - x_0^*\|^2)^{1/2}$$

được gọi là giả độ lệch của phương trình (2) tại nghiệm $x_{\alpha,\delta}$.

Dễ dàng thấy được $\rho(\alpha) = \alpha\,\|z_{\alpha,\delta} - z_0\|$ và là độ lệch suy rộng [3] của phương trình $A(z) = \bar{f}_\delta$ trên nghiệm của phương trình (4). Cũng chính vì vậy mà chúng tôi gọi là giả độ lệch. và tương tự như trong [3] – [5], $\rho(\alpha)$ có các tính chất: liên tục đơn điệu không giảm và $\lim\limits_{\alpha \to 0} \rho(\alpha) = 0$

Từ [5] ta có:

ĐỊNH LÝ 2: Với các điều kiện trong mục 1, toán tử F_1, F_2 liên tục tại điểm x_0 và x_0^* tương ứng và hoặc x_0 không phải là nghiệm của phương trình (1) hoặc $x_0^* \neq F_1(x_0)$ và.

$$\forall \delta : 0 < \delta < \delta_1 < 1 \qquad \text{có:}$$
$$(\|F_1(x_0) - x_0^*\|^2 + \|x_0 + F_2(x_0^*) - f_\delta\|^2)^{1/2} > K\delta^p$$
$$0 < p \leq 1, \; K \geq 1 + \delta_1^{1-p}.$$

Khi đó tồn tại ít nhất một giá trị $\bar{\alpha}$ sao cho giả độ lệch $\rho(\bar{\alpha}) = K\delta^p$, với $x_{\bar{\alpha},\delta}$ – nghiệm của phương trình (3) với $\alpha = \bar{\alpha}$, và:

a) $x_{\overline{\alpha},\delta} \to \overline{x}$: $\|\overline{x} - x_0\|^2 + \|F_1(\overline{x}) - x_0^*\|^2 = \min(\|x - x_0\|^2 + \|F_1(x) - x_0^*\|^2), x \in S$
với S là tập nghiệm của phương trình (1), nếu có thêm $0 < p < 1$, khi $\delta \to 0$

b) $x_{\overline{\alpha},\delta} \to \overline{x}$ nếu $p = 1$, $\delta \to 0$, khi phương trình (1) chỉ có nghiệm duy nhất.

Nhận ngày 13-8-1984

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИН В. Я., Методы решений некоррекных **задач**, М. Наука 1974.

2. МОРОЗОВ В. А., В сб. Итоги науки и техники. Мат. анализ Т.2, 1973, стр. 129.

3. АЛЬБЕР Я. И., РЯЗАНЦЕВА И. П., Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями регуляризирующий алгоритм. ДАН. СССР 1978, Т. 239 N° 51017.

4. РЯЗАНЦЕВА И. П., К Вопросу о решении нелинейных уравнений с разрывными монотонными операгорами. Сибир. Мат. Журн. 1979 Т. 20, N°1, стр. 198.

5. АЛЬБЕР Я. И., РЯЗАНСЕВА И. П., Орешении нелинейных задач с монотонными разрывными отображениямн, Дифф. Уравн. 1979 т. 19, N°2, стр. 331.

6. РЯЗАНЦЕВА И. П., О принциле невязки для нелинейных задач с монотонными операторами. Дифф. Уравн. 1983, Т. 19, N°6, стр. 1079.

7. ГОНЧАРСКИЙ А. В., ..., О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризующем алгоритме их решения. ЖВМ. ИМФ. 1675. Т. 15. N°2, стр. 290..

8. ВАЙНБЕРГ М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов. М. Наука 1972.

9. НГУЕН БЫОНГ, О приближенных решениях уравнения гаммерштейна. Prepr. Series inst of Mathematics, Institute of Computer Science and cybernetics, Hanoi, N°15, 1983.

РЕЗЮМЕ

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА

В некотором Банахвом пространстве X для уравнения Гаммерштейна

$$X + F_2F_1(x) = f_0, \qquad F_1 : X \to X^*, \qquad F_2 : X^* \to X$$

с хеминепрерывными монотонными операторами рассматриваютэя регуляризованные уравнения:

$$x + F_{2,\alpha}F_{1,\alpha}(x) = f_\delta\,, \ \|f_\delta - f_0\| \leqslant \delta,\ \delta \to 0;$$

$$F_{1,\alpha}(x) = F_1(x) + \alpha U(x - x_0),\ \forall x \in X\,;\ F_{2,\alpha}(x^*) = F_2(x^*) + \alpha V(x^* - x_0^*),\ \forall x^* \in X^*,$$

$U : X \to X^*$, $V : X^* \to X$ — дуальные отображения.

Доказываются существавание решения $x_{\alpha,\delta}$ регуляризованного уравнения игри $\delta = 0(\alpha)$, $\alpha \to 0$ для того чтобы $x_{\alpha,\delta}$ сходидась к $\overline{x} \in X$ необходимо и достаточно чтобы существовалось решение исходного уравнения. Также укезывается возможность выбора параметра регуляризации α из соотномения:

$$\rho(\alpha) = \alpha(\|x_{\alpha,\delta} - x_0\|^2 + \|F_1(x_{\alpha,\delta}) + \alpha U(x_{\alpha,\delta} - x_0) - x_0^*\|^{1/2} = K\delta^p.$$